ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ (А. Скопенков)

Введение

Теория препятствий является фундаментальной частью алгебраичской топологии и имеет многочисленные применения за ее пределами. А раз так, основные идеи этой теории наверняка можно доступно изложить человеку, не имеющему специальных познаний в топологии. К сожалению, в существующих изложениях теория препятствий появляется как раздел алгебраической топологии, а изучение последней состоит из длительного освоения немотивированных абстрактных понятий и теорий. Настоящая же заметка, напротив, посвящена изложению идей теории препятствий на простейших частных случаях. Она предназначена в первую очередь для читателей, не владеющими топологией, но мы смеем надеяться, что она будет интересна и специалистам.

В школьных (в частности, олимпиадных) задачах *невозможность* проделать некоторую конструкцию часто доказывается путем построения алгебраического *препятствия*, или *инварианта* (например, из соображений четности). Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии аналогичным образом естественно приводят к похожим друг на друга *препятствиям*. В настоящей заметке этот процесс продемонстрирован на примере наиболее наглядных топологических задач.

Для чтения §1 и §2 заметки достаточно геометрической интуиции (используемое понятие двумерного многообразия напомнено в конце введения). Для чтения §3 и §4 достаточно интуитивного представления о трехмерных и многомерных многообразиях. В частности, все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями группы гомологий и характеристические классы) естественно возникают и строго *определяются* в процессе доказательства теорем. Мы также приводим результат вычисления препятствий, дающий интересные геометрические следствия (само вычисление остается читателю в качестве задачи, решение которой можно подсмотреть в [FuFo89, MiSt65]). Подчеркнем, что мы не требуем от читателя знакомство с алгебраическим понятием группы, в тексте можно воспринимать это слово как синоним слова 'множество'.

Часть материала сформулирована в виде задач, обозначаемых жирными числами. Читатель также может рассматривать восполнение деталей *набросков доказательств* как материал для самостоятельной работы. Следует подчеркнуть, что задачи не используются в остальном тексте. В некоторых задачах могут встретится незнакомые вам термины; такие задачи следует просто игнорировать. Отметим также, что для решения задач достаточно понимания их формулировок и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение требуется доказать.

Для читателя, уже знакомого с алгебраической топологией отметим, что мы не используем стандартную терминологию теории препятствий там, где мы считаем, что она неудобна для начинающего.

Рисунок 0.1 приблизительно здесь

Каждое (компактное связное) двумерное многообразие N может быть получено из сферы, проективной плоскости или бутылки Кляйна (рис. 0.1) приклеиванием g ручек и h дырок (рис. 0.2). Здесь $g = g(N)$ (*род* многообразия N) и $h = h(N)$ некоторые числа, однозначно определяемые по поверхности N. *Триангуляцией* двумерного многообразия называется его разбиение на треугольники, любые два из которых либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону. Количества вершин, ребер и граней триангуляции обозначается V, E и F, сответственно. *Эйлеровой характеристикой* двумерного многообразия называется число $\chi = V - E + F$. Это число не зависит от триангуляции и равно $2-2g$, $1-2g$ и $-2g$ для сферы, проективной плоскости или бутылки Кляйна с g ручками.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

1. Ориентируемость

Двумерное многообразие называется *ориентируемым*, если можно ввести ориентацию (в обычном смысле) на всех треугольниках триангуляции, так что ориентации соседних треугольников согласованы. Ориентируемость не зависит от триангуляции (кто не хочет этого доказывать, может считать что ниже везде рассматриваются 2-многообразия с фиксированной триангуляцией).

1. Лист Мебиуса неориентируем.

Проиллюстрируем метод теории препятствий на примере получения критерия ориентируемости 2-многообразия. Этот критерий является по сути лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраический язык. Кроме того, существует другой критерий ориентируемости (задача 3). Поэтому приводимый критерий утолщаемости важен не только сам по себе, но как иллюстрация метода теории препятствий.

Теорема. *Замкнутое 2-многообразие N ориентируемо тогда и только тогда, когда его первый класс Штифеля-Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ нулевой.*

Вычисление. $H_1(N) = \mathbb{Z}_2^{2-\chi}$.

Определение $H_1(N)$, $w_1(N)$ и доказательство. Возьмем некоторую триангуляцию T многообразия N. Возьмем набор o ориентаций на треугольниках триангуляции T. Каждое ребро триангуляции T покрасим в красный цвет, если ориентации на примыкающих к нему треугольниках согласованы, и в белый в противном случае. Объединение красных ребер триангуляции называется *препятствующим циклом* $\omega(o)$: данный набор o ориентаций треугольников определяет ориентацию многообразия тогда и только тогда, когда $\omega(o) = \emptyset$. Ясно, что в графе $\omega(o)$ из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Подграфы данной триангуляции с таким условием называются *циклами*.

Если $\omega(o) \neq \emptyset$, то o не определяет ориентации многообразия, но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o, так чтобы препятствующий цикл стал пустым. Для этого выясним, как $\omega(o)$ зависит от o. При изменении ориентации одного треугольника к $w(o)$ прибавляется (по модулю 2) граница этого треугольника. При изменении ориентации нескольких треугольников к $w(o)$ прибавляется сумма границ этих треугольников. Будем называть также *границей* сумму границ нескольких треугольников.

Операция симметрической разности (иными словами, суммы по модулю 2) превращает множество всех циклов в абелеву группу. Назовем циклы ω_1 и ω_2 *гомологичными*, если $\omega_1 - \omega_2$ есть граница. Нетрудно понять, что если $\omega(o)$ является границей, то можно изменить o на o', так чтобы получилось $\omega(o') = 0$. Нетрудно также понять, что при изменении набора o ориентаций препятствующую цикл $\omega(o)$ заменяется на гомологичный цикл. Группа $H_1(N)$ циклов с точностью до гомологичности называется *одномерной группой гомологий поверхности N (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$)*. Можно доказать, что она зависит именно от N, а не от T. Класс гомологичности препятствующего цикла $\omega(o)$ в $H_1(N)$ является *полным* препятствием к ориентируемости многообразия N. Он и называется первым классом Штифеля-Уитни. $\square$

При рассуждениях с гомологическими классами обычно сначала работают с представляющими их циклами, а потом доказывают независимость от выбора цикла в данном классе гомологий.

В нижеследующих задачах N — двумерное многообразие.

2. a) Нарисуйте некоторый представитель w первого класса Штифеля-Уитни (т.е. препятствующий цикл) для тора, бутылки Кляйна и проективной плоскости. Докажите, что многообразие $N - w$ ориентируемо.

b) Сформулируйте и докажите аналог Теоремы для многообразий с краем. Нарисуйте представитель первого класса Штифеля-Уитни (т.е. препятствующий цикл) листа Мебиуса.

3. 2-многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда оно не содержит листа Мебиуса.

4. Несамопересекающиеся циклы порождают $H_1(N)$.

5. *Пересечением* $a \cap b$ двух гомологических классов $a, b \in H_1(N)$ называется число точек пересечения по модулю 2 представляющих их циклов общего положения. Заметим, что даже если данные гомологические классы совпадают, представляющие их циклы будут различны. Докажите корректность этого определения.

6. По планете Тополога, имеющей форму тора, текут реки Меридиан и Параллель. Два маленьких принца прошли по планете и вернулись в исходную точку, причем один из них переходил Меридиан 10 раз, а Параллель 17 раз (трансверсально), а другой – 9 раз и 12 раз, соответственно. Докажите, что один маленький принц видел следы другого.

7. a) $w_1(N) \cap a = a \cap a$ для любого $a \in H_1(N)$. Для гомологического цикла a, представляемого замкнутой несамопересекающейся кривой, это выражение равно 1, если при обходе вдоль этой кривой меняется ориентация и равно 0, если не меняется.

b) $w_1(N) \cap w_1(N) = \chi(N) \mod 2$.

8. Пересечение определяет билинейную форму $H_1(N) \times H_1(N) \to \mathbb{Z}_2$ ранга $2 - \chi(N)$.

9.* Используйте форму пересечений для построения алгоритма нахождения рода графа (идея была рассказана на занятии).

10. Сформулируйте и докажите аналоги теорем и задач этого листка для многообразий произвольной размерности.

2. Построение единичных векторных полей

Единичным касательным векторным полем на помножестве K гладкого двумерного многообразия N называется непрерывное семейство единичных касательных к N векторов $v(x)$ в точках $x \in K$ (или, что то же самое, семейство точек $y(x)$, $x \in K$, находящихся на фиксированном малом расстоянии от точки x), гладко зависящих от точки $x \in K$. Исследование векторных полей было начато Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. В этом параграфе, следуя идеям Хайнца Хопфа, мы построим препятствие к существованию единичного ($\Leftrightarrow$ ненулевого) касательного векторного поля на данном гладком многообразии. Слово 'поле' будет означать 'единичное касательное векторное поле'.

1. На торе и на любом связном двумерном многообразии с непустым краем (не обязательно ориентируемом) существует единичное касательное векторное поле.

Теорема Эйлера-Пуанкаре. *На сфере с ручками N имеется единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда число (класс) Эйлера $e(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$ равно нулю.*

Вычисление. $H_0(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ *и* $e(N) = \chi(N) = 2 - 2g(N)$. *Таким образом, среди сфер с ручками только тор имеет единичное касательное векторное поле.*

Рисунок 2.1 приблизительно здесь

Определение $H_0(N, \mathbb{Z})$, $e(N)$ и доказательство. Слово 'поле' будет означать 'единичное касательное векторное поле'. Сначала докажем, что на сфере S^2 не существует поля. Рассмотрим на сфере ориентированный граф S^1 с двумя вершинами (рис. 2.1). Построим поле на объединении U_0 'шапочек', лежащих в полусферах и почти целиком их покрывающих. Очевидно, что это можно сделать, причем однозначно (с точностью до непрерывной деформации в классе единичных касательных векторных полей). Поэтому существование поля на S^2 равносильно продолжимости построенного поля с U_0 на S^2.

Теперь продолжим построенное поле с U_0 на подмножество $U_1 \subset S^2$, полученное из U_0 добавлением 'перемычек между шапочками'. Малая окрестность каждого из двух ребер графа S^1 эквивалентна (мы не уточняем, в каком смысле) части плоскости. Поэтому поле на подмножестве этой окрестности (или, что то же самое, на подмножестве плоскости) отождествляется с отображением этой части в окружность: каждому вектору сопоставляется точка на окружности с направлением этого вектора. Любое отображение границы отрезка в окружность продолжатся на отрезок, и аналогично любое отображение двух параллельных сторон прямоугольника в окружность продолжатся на прямоугольник. Поэтому построенное поле можно продолжить с U_0 на U_1. Заметим, что такое продолжение неоднозначно. Обозначим полученное поле на U_1 через v.

Попробуем продолжить поле v, заданное на U_1, на S^2. Замыкание Δ любого из двух дисков в $S^2 - U_1$ эквивалентно части плоскости. Аналогично рассуждая о продолжении поля с границы $\partial\Delta$ диска Δ на сам диск Δ, приходим к задаче о продолжении отображения

$\partial\Delta \to S^1$ на Δ. Выберем ориентацию на многообразии N и окружности S^1. Укаханное продолжение возможно тогда и только тогда, когда степень $\epsilon_\Delta(v)$ отображения $\partial\Delta \to S^1$ равна нулю. Положим $e(v) = \epsilon_{\Delta_+}(v) + \epsilon_{\Delta_-}(v)$. Ясно, что для поля v', определенного на *всей* сфере, $e(v') = 0$. Для поля v, изображенного на рис., $e(v) = 1 + 1 = 2$ (разберитесь, почему не $1 - 1 = 0$!). Различие между полями v и v' на U_1, совпадающими на U_0, можно измерять (и задавать) парой чисел (d_+, d_-): число $d_\pm$ равно числу оборотов вектора при движении от нижней шапочки к верхней через ребро $a_\pm$ (при этом берется вектор первого поля) и обратно (при этом берется вектор второго поля). Ясно, что $\epsilon_{\Delta_\pm}(v') = \epsilon_{\Delta_\pm}(v) \pm d_+ \pm d_-$. Поэтому $e(v) = e(v')$ — противоречие.

Пусть теперь N — сфера с ручками. Возьмем некоторую триангуляцию T многообразия N. Построим поле на объединении U_0 дисков, лежащих в гранях триангуляции и почти целиком их покрывающих. Аналогично случаю сферы существование поля на N равносильно продолжимости построенного поля с U_0 на N. Аналогично случаю сферы можно продолжить построенное поле на U_0 до поля v на подмножестве $U_1 \subset N$, полученное из U_0 добавлением 'перемычек между дисками'. Аналогично случаю сферы при попытке продолжить поле v с U_1 на всю сферу возникает расстановка $\varepsilon(v)$ целых чисел в вершинах триангуляции, *препятствующая* такому продолжению. Группу всех расстановок целых чисел в вершинах триангуляции T с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^V$, где V — число вершин триангуляции T.

Различие между полями v и v' на U_1, совпадающим на U_0, можно измерять (и задавать) так. На каждом ребре триангуляции T поставим число поворотов вектора при последовательном движении вектора первого поля от правого диска относительно (ориентированного) ребра e к левому и вектора второго поля обратно. Полученную расстановку назовем *различающей* и обозначим $d(v, v')$: если $d(v, v') = 0$, то поле v можно непрерывно продеформировать в классе единичных касательных векторных полей в поле v' (обратное также справедливо). Группу всех расстановок целых чисел на ребрах триангуляции T с операцией покомпонентного сложения обозначим через $\mathbb{Z}^E$, где E — количество ребер триангуляции T.

Если $\varepsilon(v) \neq 0$, то v не продолжается на N, но еще не все потеряно: можно попытаться изменить поле v на U_1, так чтобы препятствующая расстановка стала равной нулю. Для этого выясним, как $\varepsilon(v)$ зависит от v. При изменении поля на одном ребре e 'на один оборот' к $\varepsilon(v)$ прибавляется расстановка $+1$ в начале ребра e и -1 в его конце (и 0 на всех остальных вершинах). Эта расстановка называется *границей ребра* e и обозначается ∂e. Каждому ребру e отвечает 'характеристическая' расстановка $e \in \mathbb{Z}^E$ единицы на ребре e и нуля на остальных ребрах. Определим отображение $\partial : \mathbb{Z}^E \to \mathbb{Z}^V$ формулой $\partial(n_1 a_1 + \dots + n_k a_k) = n_1 \partial a_1 + \dots + n_k \partial a_k$. Тогда $\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = \partial d(v, v')$.

Назовем расстановки $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Z}^V$ *гомологичными*, если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \partial\Omega$ для некоторого $\Omega \in \mathbb{Z}^E$. Группа $H_0(N, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^V/\partial(\mathbb{Z}^E)$ расстановок с точностью до когомологичности называется *нульмерной группой гомологий поверхности N с коэффициентами в $\mathbb{Z}$*. Из формулы $\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = \partial d(v, v')$ следует, что *класс Эйлера* $e(N) = [\varepsilon(v)] \in H_0(N, \mathbb{Z})$ не зависит от v. Значит, $e(N)$ является препятствием к существованию поля на N (и часть 'только тогда' доказана). Независимость класса Эйлера от T мы оставляем читателю в качестве задачи. Так как $d(v, v')$ может принимать *любое* значение из группы $\partial(\mathbb{Z}^E)$, то в случае $\varepsilon(v) \in \partial(\mathbb{Z}^E)$ можно изменить v на v', чтобы получилось $\varepsilon(v') = 0$. Это доказывает часть 'тогда'. □

2. Определите класс Эйлера $e(N)$ как полное препятствие к построению единичного касательного векторного поля на замкнутом *неориентируемом* двумерном многообразии N. На каких замкнутых неориентируемых двумерных многообразиях существует единичное касательное векторное поле?

3.* $e(N) = \mathrm{diag} \cap \mathrm{diag}$, где $\mathrm{diag} \subset N \times N$ есть диагональ.

4. Пусть ориентируемое двумерное многообразие N гладко вложено в $\mathbb{R}^4$ (см. определение гладкого вложения в §4).

a) Постройте препятствие $\bar{e}(N)$ к существованию единичного нормального векторного поля — *нормальное число Эйлера.*

b) Нормальное число Эйлера равно $N \cap N$.

c) Нормальное число Эйлера равно нулю.

d) Вложенное многообразие N имеет пару ортогональных векторных полей.

5.* Пусть N — неориентируемое 2-многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^4$.

a,b) То же, что и в задаче 4 (число Эйлера будет целым, а не вычетом по модулю 2!).

c) Приведите примеры вложений с ненулевым числом Эйлера.

d) $\bar{e}(N) = e(N) \mod 2$.

6. a) (Теорема Хопфа) На замкнутом ориентируемом n-многообразии N существует единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда *класс Эйлера* $e(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$ нулевой.

b) Если N связно, то $H_0(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $e(N) = \chi(N)$. Далее, $e(N^{2k+1}) = 0$ и $e(S^{2k}) = 2$.

c) Если N связно и имеет непустой край, то класс Эйлера лежит в $H_0(N, \partial N, \mathbb{Z}) \cong 0$ и, значит, $e(N) = 0$.

7. Определите *класс Эйлера* $e(N)$ как полное препятствие к построению единичного касательного векторного поля на неориентируемом n-многообразии N.

3. Построение ортонормированных систем векторных полей

Другие характеристические классы можно 'увидеть' только на многообразиях размерности три и выше. Трехмерным многообразием называется пространство, локально гомеоморфное $\mathbb{R}^3$. Примерами 3-многообразий являются произведения 2-многообразий на 1-многообразия (см. также задачу 1).

1. a) Отображение $p : M \to N$ называется *I-расслоением над* N, если любая точка $x \in N$ имеет такую окрестность Ox, что $p^{-1}x \cong Ox \times I$ и композиция этого гомеоморфизма с проекцией на Ox совпадает с p. При этом M называется *пространством расслоения*. Например, регулярная окрестность (т.е. маленькая окрестность без 'лишних' дыр) двумерного многообразия в трехмерном является пространством I-расслоения. Расслоения $p_1 : M_1 \to N$ и $p_2 : M_2 \to N$ называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$, что $p_1 = p_2 \circ h$. Докажите, что множество I-расслоений над замкнутым 2-многообразием N с точностью до эквивалентности находится во взаимно-однозначном соответствии с $H_1(N)$ (указание: определите первый класс Штифеля-Уитни I-расслоения). Как изменится ответ для незамкнутых 2-многообразий?

b) S^1-расслоения, их пространства и эквивалентность определяются аналогично с заменой I на S^1. Например, граница регулярной окрестности двумерного многообразия в $\mathbb{R}^4$ является пространством S^1-расслоения. Докажите, что множество S^1-расслоений над замкнутым ориентируемым связным 2-многообразием N с точностью до эквивалентности находится во взаимно-однозначном соответствии с $\mathbb{Z}$ (указание: определите число или класс Эйлера I-расслоения). Как изменится ответ для произвольных 2-многообразий?

Ученик Хопфа Эдуард Штифель рассмотрел задачу о построении *пары, тройки, etc. ортонормированных* касательных векторных полей на данном многообразии (ввиду каноничности процесса Грама-Шмидта ортогонализации ортонормированность можно заменить на линейную независимость). Развивая идеи Хопфа, около 1934 он пришел к определению характеристических классов (окончательная формализация была завершена Норманом Стинродом). Любопытно, что Штифель начал с частного случая ориентируемых 3-многообразий и пытался построить пример такого многообразия, на котором не существует пары ($\Leftrightarrow$ тройки) ортонормированных касательных векторных полей. Затем, используя свою теорию, он доказал, что такого многообразия нет. Позже было проделано много других конкретных вычислений, дающих интересные следствия (например, несуществование алгебр с делением на $\mathbb{R}^n$ для $n \neq 2^k$).

Теорема Штифеля (частный случай). *На замкнутом 3-многообразии N существует пара ортонормированных касательных векторных полей тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля-Уитни $w_2(N) \in H_1(N)$ нулевой.*

Вычисление. $w_2(N) = 0$ *для ориентируемого 3-многообразия N.*

Следствие. *Любое ориентируемое 3-многообразие имеет тройку ортонормированных касательных векторных полей.*

Набросок определения $H_1(N)$, $w_2(N)$ и доказательства. Будем называть пару ортонормированных касательных векторных полей просто парой полей. Триангулируем многообразие N. Построим пару полей на трехмерных шарах, немного меньших 3-симплексов триангуляции. Продолжим пару полей на трубку, соединяющую два таких шара и протыкающую двумерную грань триангуляции. Для этого заметим, что окрестность этой трубки эквивалентна подмножеству пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда каждой паре векторов в точке x на этой трубке сопоставится пара векторов в $\mathbb{R}^3$, а всей трубке — отображение ребра в SO_3 (пространство ортонормированных реперов в $\mathbb{R}^3$). Из связности пространства SO_3 следует, что построенная пара векторных полей продолжается на 1-остов.

Продолжим пару полей на пробку, соединяющую шары и трубки и протыкаемую ребром триангуляции. Отображение 'боковой поверхности' пробки в SO_3 соответствует элементу из $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$. Если этот элемент ненулевой, покрасим ребро, протыкающе пробку, в красный цвет. Таким образом, заданию пары w ортонормированных векторных полей на объединении дисков и трубок соответствует красный подграф $\varepsilon(w)$ данной триангуляции. В нашем случае число красных ребер, выходящих из каждой вершины, четно. Подграфы с таким условием называются *(одномерными) циклами.* Далее аналогично предыдущему определяется гомологичность циклов, группа $H_1(N)$ и *второй класс Штифеля-Уитни* $w_2(N) = [\varepsilon(w)] \in H_1(N)$. Аналогично предыдущему проверяется, что $w_2(N) = 0$ тогда и только тогда, когда w можно продолжить на объединение U_2 шаров, трубок и пробок. Пару полей w ортонормированных векторных полей на U_2 всегда можно продолжить на на все многообразие N (поскольку $\pi_2(SO_3) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_2(S^3) = 0$). $\square$

2. Пусть N — замкнутое ориентируемое четырехмерное многообразие.

a) Определите $H_2(N)$ и $w_2(N) \in H_2(N)$ как (не полное) препятствие к построению системы из трех ортонормированных векторных полей.

b) То же как полное препятствие к существованию спинорной структуры на N.

c) Определите форму пересечений $\cap : H_2(N) \times H_2(N) \to \mathbb{Z}_2$ и докажите, что $a \cap a = w_2 \cap a$ для любого $a \in H_2(N)$ (более точно, это выражение равно нулю тогда и только тогда, когда в окрестности любого цикла, представляющего a, можно ввести спинорную структуру).

d) $w_2(N) \cap w_2(N) = \chi(N) \mod 2$.

e) Сформулируйте и докажите аналоги задач (a)-(d) для неориентируемых или незамкнутых 4-многообразий.

Теорема Штифеля (общий случай). *Если на замкнутом ориентируемом n-многообразии N существует k ортонормированных касательных векторных полей $(1 < k < n)$, то $(n-k+1)$-й класс Штифеля-Уитни $W_{n-k+1}(N) \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ нулевой. Через $\mathbb{Z}_{(i)}$ обозначается группа $\mathbb{Z}$ для четного i и $\mathbb{Z}_2$ для нечетного i.*

Пример вычисления. $w_i(\mathbb{R}P^n) = C_n^i \mod 2$, *где $w_i(N) \in H^i(N, \mathbb{Z}_2)$ — приведение по модулю 2 препятствия $W_i(N)$ (которое легче вычисляется).*

Следствие. *Если на $\mathbb{R}^n$ имеется структура алгебры с делением, то n есть степень двойки.*

Набросок определения $H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$, $W_{n-k+1}(N)$ и доказательства. Пусть $V_{n,k}$ — многообразие Штифеля ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$. Аналогично предыдущему, из соотношений $\pi_i(V_{nk}) = 0$ для $i < n-k$, следует, что k полей беспрепятсвенно строятся на $(n-k)$-остове. Поскольку $\pi_{n-k}(V_{nk}) = \mathbb{Z}_{(n-k)}$ для $1 < k < n$, то при продолжении поля на $(n-k+1)$-остов появляется препятствие $W_{n-k+1} \in H^{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ (которое уже не является полным). $\square$

3. Определите описанным выше способом w_1 и покажите, что это определение совпадает с полученным в §1.

4. В 1942 Лев Семенович Понтрягин придумал новые характеристические классы. Владимир Абрамович Рохлин показал, что эти классы естественно появляются при обобщении задачи Штифеля: при построении системы касательных векторных полей, некоторые фиксированные подсистемы которой имеют ранг, не меньший данного ранга (своего для каждой из этих фиксированных подсистем). В дальнейшем оказалось, что классы, рассмотренные Понтрягиным, зависимы (мы не уточняем, в каком смысле) между собой и с классами Штифеля-Уитни. Поэтому среди всех этих классов выделены *классы Понтрягина*, образующие 'максимальную независимую систему'.

Определите j-й класс Понтрягина $p_j(N) \in H^{4j}(N, \mathbb{Z})$ как препятствие к построению системы из $n-2j+2$ векторов, имеющей ранг не менее $n-2j+1$ в каждой точке.

4. Погрузимость и вложимость многообразий

Гладкое отображение $f : N \to \mathbb{R}^m$ гладкого многообразия N называется *погружением*, если $df(x) \neq 0$ для любой точки $x \in N$. Погружение $f : N \to \mathbb{R}^m$ называется *вложением*, если оно инъективно. По соображениям общего положения, любое n-многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погружается в $\mathbb{R}^{2n}$. В 1935 году Хопф рассказал о результатах Штифеля на Международной топологической конференции в Москве. Там выяснилось, что Хасслер Уитни около 1934 г. тоже естественно пришел к определению характеристических классов, изучая вложимость и погрузимость n-многообразий в $\mathbb{R}^m$ с $m < 2n+1$ и $m < 2n$, соответственно. Используя свою теорию, Уитни доказал вложимость n-многообразий в $\mathbb{R}^{2n}$, их погрузимость в $\mathbb{R}^{2n-1}$, а также невложимость и непогрузимость некоторых проективных пространств. Позже было проделано много других конкретных вычислений, дающих интересные следствия.

Теорема Уитни. *Если замкнутое ориентирумое n-многообразие N погрузимо в $\mathbb{R}^m$, то $(m-n+1)$-й нормальный класс Штифеля-Уитни $\bar W_{m-n+1}(N) \in H_{2n-m+1}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$ нулевой.*

Примеры вычислений. $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^{k-i}\bar w_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, *где $k > 1$ и $\bar w_i(N) \in H^i(N, \mathbb{Z}_2)$ — приведение по модулю 2 препятствия $\bar W_i(N)$. Если q меньше количества единиц в двоичной записи числа n, то $\bar w_{n-q}(N) = 0$.*

Примеры следствий. Если n есть степень двойки, то $\mathbb{R}P^n$ не вложимо в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и не погрузимо в $\mathbb{R}^{2n-2}$.

Набросок определения $H_{2n-m+1}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$, $\bar W_{m-n+1}(N)$ и доказательства. Если N погрузимо в $\mathbb{R}^{2n-1}$, то для композиции $N^n \to \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ погружения и включения существует единичное *нормальное* векторное поле. Аналогично теореме Хопфа, можно определить *нормальный класс Эйлера* $\bar e(N, f) \in H^n(N, \mathbb{Z})$ как препятствие к построению единичного нормального векторного поля для погружения $f : N \to \mathbb{R}^{2n}$. Итак, если N погружается в $\mathbb{R}^{2n-1}$, то $\bar e(N, f) = 0$ для *некоторого* отображения f, а именно, для композиции $f : N^n \to \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ (см. задачу 2.4). Аналогично для композиции $f : N \to \mathbb{R}^{2n-1} \to \mathbb{R}^M$ погружения и включения равно нулю $\mathbb{Z}_2$-препятствие к построению $M - 2n + 1$ ортонормированных нормальных векторных полей, называемое *n-м нормальным классом Штифеля-Уитни* $\bar w_n(N, f) \in H_0(N)$. Аналогично, если N погрузимо в $\mathbb{R}^m$, то для композиции $f : N \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^M$ погружения и включения равно нулю препятствие к построению $M - m$ линейно независимых нормальных векторных полей, называемое *$(m-n+1)$-м нормальным классом Штифеля-Уитни* $\bar W_{m-n+1}(N, f) \in H_{2n-m+1}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$. Осталось доказать независимость $\bar W_{m-n+1}(N, f)$ от f. Класс $\bar W_{m-n+1}(N, f)$ сохраняется при композиции $f : N \to \mathbb{R}^M$ с включением $\mathbb{R}^M \subset \mathbb{R}^K$, поскольку гомоморфизм включения $\pi_{m-n}(V_{M-n,M-m}) \to \pi_{m-n}(V_{K-n,K-m})$ является изоморфизмом при $M \geq m+2$. Возьмем теперь два разных погружения $f, g : N \to \mathbb{R}^m$. Так как $\tau \oplus \nu_f = \tau \oplus \nu_g = m$, то $\nu_f \oplus m = \nu_g \oplus m$, и $\bar W_{m-n+1}(N, f) = \bar W_{m-n+1}(N, g)$. $\square$

1. Аналогично нормальным классам Штифеля-Уитни, *нормальные классы Понтрягина* препятствуют погрузимости: если ориентируемое n-многообразие N погрузимо в $\mathbb{R}^m$, то *k-й нормальный класс Понтрягина* $\bar p^k(N) \in H^{4k}(N, \mathbb{Z})$ нулевой для $2k > m - n$.

2. Пусть $f, f' : N \to \mathbb{R}^m$ — два погружения n-многообразия N, находящиеся в общем положении.

a) Если N ориентируемо и $m = 2n$, то $fN \cap f'N$ есть конечное число точек со знаками, сумма которых равна 0 и равна $\bar e(N, f)$.

b) Если f, f' — вложения, то $f^{-1}(fN \cap f'N)$ есть подмногообразие многообразия N, гомологический класс которого равен 0 и двойственен по Пуанкаре к $\bar w_{m-n}(N)$.

c) Тогда $f^{-1}(fN \cap f'N)$ и $\Sigma(f) = \mathrm{Cl}\{x \in N \ : \ |f^{-1}fx| \geq 2\}$ есть погруженные подмногообразие многообразия N, причем гомологический класс первого равен 0, а второго $\bar w_{m-n}(N)$ (и не зависит от f).

3. a) Если n-многообразие N вложимо в $\mathbb{R}^m$, то $\bar w_{m-n}(N) = 0$.

b) Если к тому же N ориентируемо и $m - n$ четно, то $\bar p_{\frac{m-n}{2}}(N) = 0$ (см. Задачу 2).